7. Séries de potências

7.1 Definições e exemplos

Definição 7.1.1 A série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

se chama uma *série de potências em* $(x-a)$.

■ **Exemplo 7.1** Quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ converge?

Solução. Pelo Teste de razão temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}(n+1)!}{|x|^n n!} = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

para $x \neq 0$. Assim a série converge só em $x=0$, e diverge se $x \neq 0$. ;-)

■ **Exemplo 7.2** Quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^n}$ converge?

Solução. Pelo Teste de raiz temos

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^n}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = |x|\cdot 0 = 0,$$

logo a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$. ;-)

■ **Exemplo 7.3** Quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(x-1)^n$ converge?

Solução. Pelo Teste de raiz temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n|x-1|^n} = |x-1| \cdot 3.$$

Logo se $3|x-1| < 1$ (ou seja $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$), a série converge. Vamos analisar o caso $3|x-1| = 1$, isto é $x = \frac{4}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$.

a) Se $x = \frac{4}{3}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(\frac{4}{3}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$$

e a série diverge.

b) Se $x = \frac{2}{3}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(\frac{2}{3}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

e a série diverge.

Portanto a série converge apenas para $x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. ;-)

Teorema 7.1.1 Para $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ existem apenas três opções:
1) Série converge só em $x = a$.
2) Série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
3) Existe $R > 0$ tal que série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R chama-se *raio de convergência*.

Seja $I = \{x \in \mathbb{R} \; : \; \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n converge\}$. I chama-se *intervalo de convergência*.

Corolario 7.1.2 Devido Teorema 7.1.1 o intervalo de convergência coincide com um dos intervalos:

$$(a-R, a+R),$$
$$(a-R, a+R],$$
$$[a-R, a+R),$$
$$[a-R, a+R].$$

■ **Exemplo 7.4** Ache raio e intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^3}$.

Solução. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{|x-2|^n} = |x-2| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = |x-2|.$$

Portanto, se $|x-2| < 1$, a série converge, e se $|x-2| > 1$ série diverge. Assim $R = 1$.

Analisaremos o caso $|x-2| = 1$, isto é $x = 3$ ou $x = 1$.

a) Se $x = 3$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ convergente (série harmônica generalizada).

b) Se $x = 1$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3}$ convergente pelo a) (absolutamente).

Resumindo concluímos que o intervalo de convergência é $[1, 3]$. ;-)

■ **Exemplo 7.5** Ache o raio e intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n+2}\cdot 2^n}$.

Solução.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{n+2}\cdot 2^n}{|x+1|^n} = \frac{1}{2}|x+1|\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}} = |x+1|\cdot\frac{1}{2}.$$

Assim, se $|x+1|\cdot\frac{1}{2} < 1$ ou seja $|x+1| < 2$, série converge. Se $|x+1| > 2$, série diverge. Portanto o raio de convergência é 2.

Analisaremos o caso $|x+1| = 2$, isto é $x = 1$ ou $x = -3$.

a) Se $x = 1$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n+2}\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{\sqrt[3]{n+2}\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$$

e a série diverge (pela comparação no limite com $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ que diverge).

b) Se $x = -3$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n+2}\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{\sqrt[3]{n+2}\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$$

e a série converge pelo Teste de Leibniz. Portanto o intervalo de convergência é $[-3,1)$. ;-)

■ **Exemplo 7.6** Ache raio e intervalo de convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot(x+2)^n}{n\cdot\ln n}$.

Solução. Temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^{n+1}\cdot|x+2|^{n+1}}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}\,\frac{n\cdot\ln n}{(-3)^n\cdot|x+2|^n} = 3\cdot|x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 3\cdot|x+2|.$$

Se $3\cdot|x+2| < 1$ ou $|x+2| < \frac{1}{3}$, a série converge. E se $|x+2| > \frac{1}{3}$, a série diverge. Logo o raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$.

Analisaremos o caso $|x+2| = \frac{1}{3}$, ou seja $x = -\frac{5}{3}$, ou $x = -\frac{7}{3}$

a) Se $x = -\frac{5}{3}$, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot(-\frac{5}{3}+2)^n}{n\cdot\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$$

e a série converge pelo Teste de Leibniz.

b) Se $x = -\frac{7}{3}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot(-\frac{7}{3}+2)^n}{n\cdot\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$$

e a série diverge pelo Teste da Integral, pois

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\ln x\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} \ln\ln b - \ln\ln 2 = \infty.$$

Portanto o intervalo de convergência é $\left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$. ;-)

7.2 Como calcular o raio de convergência R?

Método 1. Dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Aplicando o teste de razão e supondo $c_n \neq 0$, para $n \geq p$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,$$

onde $x_n = c_n(x-a)$. Denote $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, assim:

1) Série converge se $|x-a|\cdot l < 1$ ou seja $|x-a| < \frac{1}{l}$;

2) Série diverge se $|x-a| > \frac{1}{l}$.

Portanto

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}} \tag{7.1}$$

O formula (7.1) chama-se *formula de d'Alambert*.

Método 2. Analogamente, aplicando o teste de razão e supondo $c_n \neq 0$, para todos $n \geq p$, obtemos

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}} \tag{7.2}$$

O formula (7.2) chama-se *formula de Cauchy*.

Obs Se $l = 0$, temos $R = \infty$, isto é a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$
Se $l = \infty$, temos $R = 0$, isto é a série converge somente para $x = a$.

■ **Exemplo 7.7** Ache R para $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n (x-1)^n$

Solução. Usando formula de Cauchy, obtemos

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n+7} = \frac{3}{5}$$

portanto $R = \frac{5}{3}$, e a série converge para $x \in (-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$. Os pontos $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{8}{3}$ exigem a análise adicional. ;-)

■ **Exemplo 7.8** Ache R para $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Solução. Usando formula de d'Alambert, obtemos

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2(2n)!} = 4$$

portanto $R = \frac{1}{4}$, e a série converge para $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Os pontos $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$ exigem a análise adicional. ;-)

■ **Exemplo 7.9** Ache R da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 0 \cdot x + \frac{2!}{1} x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{4!}{2!} x^4 + \ldots$$

Solução. Neste caso $c_{2n-1} = 0$, assim não podemos aplicar as formulas 7.1 e 7.2.

Usaremos teste de razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}(2n+2)!(n!)^2}{|x|^{2n}(2n)!((n+1)!)^2} = |x|^2 \cdot 4.$$

Agora, se $|x|^2 \cdot 4 < 1$, ou seja $|x| < \frac{1}{2}$, a série converge. Se $|x|^2 \cdot 4 > 1$, ou seja $|x| > \frac{1}{2}$, a série diverge. Portanto $R = \frac{1}{2}$. ;-)

■ **Exemplo 7.10** Quando a série$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \operatorname{sen} x}$ converge?

Seja $\operatorname{sen} x = b$, assim temos a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \cdot b}$. Denote $x_n = (-1)^{n+1} e^{-n \cdot b}$.

Se $b > 0$ ou $\operatorname{sen} x > 0$, a série converge pelo teste de Leibniz.

Se $b < 0$ ou $\operatorname{sen} x < 0$, a série diverge, pois $x_n \nrightarrow 0$.

Se $b = 0$ ou $\operatorname{sen} x = 0$, obtemos série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ divergente pois $x_n \nrightarrow 0$.

Logo a série converge quando $\operatorname{sen} x > 0$.

Podemos concluir então que existem as séries que dependem de variável x, e que tem o conjunto de convergência diferente de um intervalo.